ИТЕРИРОВАННЫЕ ЯДРА. РЕЗОЛЬВЕНТА ОПЕРАТОРА

Следует ввести понятие итерированного ядра. Для этого введем линейный интегральный оператор T, действующий в пространстве $C(\overline{G})$, который для любой функции $x(t) \in C(\overline{G})$ задается соотношением

$$\mathrm{T}x = \int_G \mathrm{K}(t, s)\, x(s)\, ds. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (2) в операторной записи примет вид

$$x(t) = \mu \mathrm{T}x + y(t).$$

Пусть даны два интегральных оператора T_1 и T_2 с непрерывными ядрами $\mathrm{K}(t, s)$ и $\mathrm{L}(t, s)$, т.е.

$$\mathrm{T}_1 x(t) = \int_G \mathrm{K}(t, s)\, x(s)\, ds; \qquad \mathrm{T}_2 x(t) = \int_G \mathrm{L}(t, s)\, x(s)\, ds.$$

Теперь можно определить произведение операторов $\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$:

$$(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1)x(t) = \mathrm{T}_2(\mathrm{T}_1 x) = \int_G \mathrm{L}(t, s_1)\left[\int_G \mathrm{K}(s_1, s)\, x(s)\, ds\right] ds_1 =$$

$$= \int_G \left[\int_G \mathrm{L}(t, s_1)\,\mathrm{K}(s_1, s)\, ds_1\right] x(s)\, ds.$$

Таким образом, ядро оператора $\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$ находится по формуле

$$\tilde{\mathrm{K}}(t, s) = \int_G \mathrm{L}(t, s_1)\,\mathrm{K}(s_1, s)\, ds_1.$$

Введем итерированные ядра, соответствующие целым положительным степеням оператора T, заданного формулой (5), причем основное ядро $\mathrm{K}(t, s)$ обозначим для симметрии через $\mathrm{K}_1(t, s)$:

$$\mathrm{K}_1(t, s) = \mathrm{K}(t, s); \qquad \mathrm{K}_n(t, s) = \int_G \mathrm{K}_{n-1}(t, s_1)\,\mathrm{K}_1(s_1, s)\, ds_1. \qquad (5_0)$$

Ядро $\mathrm{K}_n(t, s)$ есть ядро оператора T^n.

Рассмотрим ряд (ряд Неймана уравнения (2)):

$$y(t) + \mu \int_G \mathrm{K}_1(t, s)\, y(s)\, ds + \ldots + \mu^n \int_G \mathrm{K}_n(t, s)\, y(s)\, ds + \ldots.$$

При $|\mu| < \dfrac{1}{d}$, где $d = \max\limits_{t \in G} \int\limits_G |\mathrm{K}(t, s)| ds$, этот ряд равномерно в $\overline{G}$ сходится к решению $x(t)$ интегрального уравнении (2), т.е.

$$x(t) = y(t) + \mu \int\limits_G \mathrm{K}_1(t, s) y(s) ds + \ldots + \mu^n \int\limits_G \mathrm{K}_n(t, s) y(s) ds + \ldots.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$x(t) = y(t) + \mu \int\limits_G \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s) \right) y(s) ds,$$

или
$$x(t) = y(t) + \mu \int\limits_G \Gamma(t, s, \mu) y(s) ds, \qquad (6)$$

где функция
$$\Gamma(t, s, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s) - \qquad (6_0)$$

резольвента уравнения (2).

(6)- решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (2)

Пример 1.3. Построить резольвенту для интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t \cos s) x(s) ds + y(t).$$

Решение. Резольвента интегрального уравнения Фредгольма второго рода вычисляется по формуле (6_0). Следовательно, для нахождения резольвенты необходимо вычислить итерированные ядра $\mathrm{K}_n(t, s)$. По формуле (5_0)

$$\mathrm{K}_1(t, s) = \sin t \cos s; \quad \mathrm{K}_2(t, s) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos s' \sin s' \cos s \, ds' =$$

$$= \frac{\sin t \cos s}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2s' \, ds' = \frac{\sin t \cos s}{2}.$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что

$$\mathrm{K}_n(t, s) = \frac{\sin t \cos s}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, резольвента заданного интегрального уравнения имеет вид

$$\Gamma(t, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-1} \sin t \cos s =$$

$$= \frac{2\lambda}{2-\lambda} \sin t \cos s \quad \text{при} \quad |\lambda| < 2.$$

Пример 1.4. Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int_0^t a^{t-s} x(s)\, ds + y(t), \qquad a > 0.$$

Решение. Согласно формуле (6_0) резольвента $\Gamma(t, s, \lambda)$ имеет вид $\Gamma(t, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s)$, где $\mathrm{K}_n(t, s)$ – итерированные ядра, которые могут быть вычислены по формуле:

$$\mathrm{K}_n(t, s) = \int_s^t \mathrm{K}_{n-1}(t, s') \mathrm{K}_1(s', s)\, ds'.$$

Тогда получим: $\mathrm{K}_1(t, s) = a^{t-s};$

$$\mathrm{K}_2(t, s) = \int_s^t a^{t-s'} \cdot a^{s'-s} ds' = \int_s^t a^{t-s} ds' = a^{t-s}(t-s);$$

$$\mathrm{K}_3(t, s) = \int_s^t a^{t-s'}(t-s') a^{s'-s} ds' = a^{t-s} \int_s^t (t-s')\, ds' = \frac{a^{t-s}(t-s)^2}{2}.$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что

$$\mathrm{K}_n(t, s) = a^{t-s} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Подставляя выражения $\mathrm{K}_n(t, s)$ в (6_0), получим

$$\Gamma(t, s, \lambda) = a^{t-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-1}}{(n-1)!} = a^{t-s} \cdot e^{\lambda(t-s)}.$$

Пример 1.5. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^t a^{t-s} x(s)\, ds + 2t \cdot e^t.$$

Решение. Согласно примеру 1.4 резольвента заданного интегрального уравнения Вольтерра второго рода имеет вид

$$\Gamma(t, s, \lambda) = a^{t-s} \cdot e^{\lambda(t-s)}.$$

Следовательно, согласно формуле (6) решение нашего интегрального уравнения будет:

$$x(t)=2\int_{0}^{t} a^{t-s}\cdot e^{t-s}e^{s}\cdot sds+2te^{t}=2e^{t}\left(\frac{a^{t}}{\ln^{2}a}+\frac{\ln a-1}{\ln a}t-\frac{1}{\ln^{2}a}\right).$$

ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Пусть заданы следующие интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t)-\mu\int_{G} \mathrm{K}(t,s)\,x(s)\,ds=y(t), \tag{7}$$

$$x_0(t)-\mu\int_{G} \mathrm{K}(t,s)\,x_0(s)\,ds=0. \tag{7_0}$$

Совместно с этими уравнениями будем рассматривать сопряженные к ним уравнения:

$$z(t)-\overline{\mu}\int_{G} \overline{\mathrm{K}(s,t)}\,z(s)\,ds=\omega(t), \tag{8}$$

$$z_0(t)-\overline{\mu}\int_{G} \overline{\mathrm{K}(s,t)}\,z_0(s)\,ds=0, \tag{8_0}$$

где ядро $\overline{\mathrm{K}(s,t)}$ называют сопряженным к ядру $\mathrm{K}(t,s)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. При фиксированном μ следующие четыре условия эквивалентны:

1) однородное уравнение (7_0) имеет только тривиальное решение $x_0(t)\equiv 0$;

2) для неоднородного уравнения (7) существует единственное решение для любой правой части $y(t)\in C(\overline{G})$;

3) однородное сопряженное уравнение (8_0) имеет только тривиальное решение $z_0(t)\equiv 0$;

4) для неоднородного сопряженного уравнения (8) существует единственное решение для любой правой части $\omega(t)\in C(\overline{G})$.

Замечание 2. Из теоремы 3 следует, что единственность решения уравнения Фредгольма второго рода эквивалентна существованию решения этого уравнения при любой правой части.

Теорема 4. При фиксированном μ однородное уравнение (7_0) и сопряженное ему уравнение (8_0) имеют одинаковое конечное число $r \geq 0$ линейно независимых решений $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_r^{(0)}$ и $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, ..., $z_r^{(0)}$.

Замечание 3. Если однородное уравнение (7_0) имеет только тривиальное решение при фиксированном μ, то это число μ называют нехарактеристическим (несингулярным).

Если при заданном μ однородное уравнение (7_0) имеет r ($r \geq 1$) линейно независимых решений, то μ называют характеристическим (сингулярным) числом, число $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ называют собственным числом, а соответствующие ему r линейно независимых функций называют собственными функциями оператора Фредгольма (5).

Теорема 5. При фиксированном μ для существования решения неоднородного уравнения (7) (соответственно (8)) необходимо и достаточно чтобы правая часть $y(t)$ (соответственно $\omega(t)$) была ортогональна (в метрике L_2) всем решениям однородного сопряженного уравнения (8_0) (соответственно (7_0)) или более подробно:

а) для существования решения неоднородного уравнения (7) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $y(t)$ была ортогональна всем решениям однородного сопряженного уравнения (8_0), т.е.

$$\left(y, z_i^{(0)}\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., r$$

при этом решение $x(t)$ уравнения (7) имеет вид

$$x(t) = x_{\text{част}}(t) + \sum_{\text{K}=1}^{r} C_{\text{K}} x_{\text{K}}^{(0)}(t), \tag{9}$$

где $x_{\text{част}}(t)$ – произвольное частное решение уравнения (7), $x_{\text{K}}^{(0)}(t)$ $(\text{K} = 1, 2, ..., r)$ – линейно независимые решения уравнения (7_0), а C_{K} $(\text{K} = 1, 2, ..., r)$ – произвольные числа;

б) для существования решения неоднородного уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $\omega(t)$ была ортогональна всем решениям однородного уравнения (7_0), т.е.

$$\left(\omega,\, x_i^{(0)}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

при этом решение $z(t)$ уравнения (8) имеет вид

$$z(t) = z_{\text{част}}(t) + \sum_{\mathrm{K}=1}^{r} \alpha_{\mathrm{K}}\, z_{\mathrm{K}}^{(0)}(t), \tag{10}$$

где $z_{\text{част}}(t)$ – произвольное частное решение уравнении (8); $z_{\mathrm{K}}^{0}(t)$ $(\mathrm{K} = 1, 2, \ldots, r)$ – линейно независимые решения уравнения (8_0), а α_{K} – произвольные числа.

Замечание 4. Скалярное произведение (f, g) вводится следующим образом $(f, g) = \int\limits_G f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

После формулировок теорем Фредгольма рекомендуем проиллюстрировать эти теоремы на примере систем линейных алгебраических уравнений.

Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода называют вырожденным, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от t на функции только от s, т.е. если оно имеет вид

$$\mathrm{K}(t, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\overline{b_i}(s), \tag{11}$$

где функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны в G и линейно независимы между собой.

Замечание 5. Ядро сопряженное к вырожденному ядру (11), очевидно, также вырождено и имеет вид

$$\overline{\mathrm{K}(s; t)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i(t)}\, b_i(s).$$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$x(t)-\mu\int_G \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\overline{b_i(s)}x(s)\,ds=y(t) \tag{12}$$

легко сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, положим

$$\int_G x(s)\overline{b_j}(s)\,ds=\xi_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Тогда если у интегрального уравнения (12) есть решение, то оно имеет вид

$$x(t)=\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i(t)+y(t), \tag{14}$$

где ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ – неизвестные постоянные. Чтобы найти постоянные ξ_i, подставим значение $x(t)$, определяемое формулой (14), в равенство (13) и получим, вводя обозначения

$$\alpha_i=(y, b_i); \qquad a_{ij}=\delta_{ij}-\mu\left(a_i, b_j\right)=\begin{cases}1-\mu\left(a_i, b_i\right) & \text{при } i=j;\\ -\mu\left(a_i, b_j\right) & \text{при } i\neq j,\end{cases}$$

систему линейных алгебраических уравнений относительно ξ_i

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j=\alpha_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Если определитель этой системы отличен от нуля, то система (15), а следовательно, и интегральное уравнение (12) имеют единственное решение. Решением интегрального уравнения (12) будет функция $x(t)$, определяемая равенством (14), где числа ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n есть решения системы (15). Если же определитель системы (15) равен нулю, то согласно теореме Фредгольма (теорема 5) интегральное уравнение (12) имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть $y(t)$ ортогональна всем решениям однородного интегрального уравнения

$$z^0(t)-\overline{\mu}\int_G \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\overline{a_i}(s)z^0(s)\,ds=0.$$

Замечание 6. Можно показать, что интегральное уравнение (12) с вырожденным ядром и система (15) эквивалентны в том смысле, что каждому решению $x(t)$ уравнения (12) соответствует только одно решение $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ системы (15) и, наоборот, каждому решению $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ системы (15) соответствует единственное решение интегрального уравнения (12) и это соответствие между решениями уравнения (12) и системы (15) осуществляется формулой (14).

Пример 1.6. Решить однородное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (\arccos t) \cdot x(s)\, ds.$$

Решение. Запишем это интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda (\arccos t) \cdot C_1, \tag{16}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 x(s)\, ds. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (17), получим для определения постоянной C_1

уравнение

$$C_1 = \lambda C_1 \int_0^1 \arccos s\, ds.$$

Откуда очевидно имеем

$$C_1 (1 - \lambda) = 0.$$

Следовательно, если $\lambda = 1$, то C_1 – произвольное, и решение получаем в виде $x(t) = C \arccos t$. Если же $\lambda \neq 1$, то $C_1 = 0$ и заданное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Пример 1.7. Найти все решения уравнения

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 t\left(s^2 \operatorname{ch} s - e^{s^2}\right) x(s)\, ds + \operatorname{sh} t.$$

Решение. Перепишем заданное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром в виде

$$x(t) = \lambda t C_1 - \lambda t C_2 + \operatorname{sh} t, \tag{18}$$

где
$$C_1 = \int_{-1}^{1} s^2 \operatorname{ch} s \cdot x(s)\, ds, \quad C_2 = \int_{-1}^{1} e^{s^2} \cdot x(s)\, ds. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (19), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \int\limits_{-1}^{1} s^3 \operatorname{ch} s\, ds - \lambda C_2 \int\limits_{-1}^{1} s^3 \operatorname{ch} s\, ds + \int\limits_{-1}^{1} s^2 \operatorname{ch} s \cdot \operatorname{sh} s\, ds; \\ C_2 = \lambda C_1 \int\limits_{-1}^{1} s\, e^{s^2} ds - \lambda C_2 \int\limits_{-1}^{1} s\, e^{s^2} ds + \int\limits_{-1}^{1} e^{s^2} \operatorname{sh} s\, ds. \end{cases}$$

Так как под знаком всех интегралов стоят нечетные функции, то получим $C_1 = 0,\ \ C_2 = 0$. Следовательно, заданное интегральное уравнение имеет единственное решение $x(t) = \operatorname{sh} t$.